

# Taolenn

Kentskrid . . . . . xvii

## TEBEGOURIEZH

<b>1</b>	<b>Eriñvañ. Kevosodouriezh. Binom Newton</b>	<b>3</b>
1.1	Teskad bevennek a briñvel $n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	3
1.1.1	Priñvel un teskad bevennek $E$ (niver e elfennoù) . . . . .	3
1.1.2	Perzhioù priñvelion an teskadoù bevennek . . . . .	4
1.1.3	Skorlakadenn — pe pennaenn — ar vesaerion . . . . .	5
1.1.4	Eriñvañ an arloadurioù, ensaezhadurioù ha kesaezhadurioù eus $E$ da $F$ , daou deskad bevennek hevelep ma'z eo $\text{Card}(E) = p$ ha $\text{Card}(F) = n$ ( $n \neq 0$ ha $p \neq 0$ ) . . . . .	6
1.2	Teskad $\mathfrak{P}(E)$ an isteskadoù eus un teskad bevennek $E$ . . . . .	12
1.2.1	Despizadurioù . . . . .	12
1.2.2	Niver an isteskadoù a briñvel $p$ ( $p \leq n$ ) eus un teskad bevennek $E$ a briñvel $n$ . Kevosodadoù . . . . .	14
1.2.3	Reollun binom Newton . . . . .	12
1.2.4	Kevosodadoù gant arreadoù . . . . .	23
1.2.5	Lodennadur hollekaet . . . . .	27
	Poelladennoù . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Egorioù tebekaet. Tebekadur</b>	<b>33</b>
2.1	Egor tebekaet bevennek . . . . .	33
2.1.1	Egorioù tebekadus bevennek . . . . .	33
2.1.2	Tebekadur war un egor tebekadus bevennek . . . . .	33
2.1.3	perzhioù . . . . .	34

2.2	Tebekadur war un teskad diforzh . . . . .	39
2.2.1	Aljebr Boole, $\sigma$ -aljebr . . . . .	39
2.2.2	Tebekadur un aljebr Boole pe ur $\sigma$ -aljebr . . . . .	40
2.2.3	Dianlenadoù aksiomenn an tebegoù hollel . . . . .	43
2.3	Reollun an tebegoù kenaozat . . . . .	60
2.3.1	Digoradur . . . . .	60
2.3.2	Tebekadur amveziadek . . . . .	61
2.4	Darvoudoù dizalc'h . . . . .	64
2.4.1	Dizalc'h etre daou zarvoud . . . . .	64
2.4.2	Dizalc'h etre lies darvoud . . . . .	67
2.5	Reollun Bayes . . . . .	69
2.5.1	Kudenn Bayes . . . . .	69
2.5.2	Hollekadur delakadenn Bayes . . . . .	72
2.5.3	Evezhiadennoù a-zivout tebegoù Bayes . . . . .	75
2.6	Tebekadur savelet war liesâd kartezel daou egor tebekaet . . . . .	79
2.6.1	Tebekadur savelet war $\Omega \times \Omega'$ . . . . .	79
2.6.2	Hollekadur d'ul liesâd bevennek a $n$ egor . . . . .	80
2.7	Ar goulunioù tennañ tebegouriel . . . . .	81
2.7.1	Erouezadur ar c'hraf . . . . .	81
2.7.2	An tennañ dizilerc'h . . . . .	81
2.7.3	An tennañ bernoulliat . . . . .	84
2.7.4	Keverata an daou zoare tennañ . . . . .	84
2.7.5	Hollekadur an tennañ dizilerc'h . . . . .	86
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>89</b>

### 3 Gwehanadur dargouezhel unvent 93

3.1	Despizadurioù . . . . .	93
3.1.1	Erouezadur ar meizad . . . . .	93
3.1.2	Kounaat keal an arloadur keveskemm . . . . .	94
3.1.3	Despizadur ar gwehaniñ dargouezhel . . . . .	95
3.1.4	Tebekaat ur gwehanadur . . . . .	99
3.1.5	Egor sturiadel ar gwehanadurioù dargouezhel . . . . .	101
3.1.6	Tebekter regel keitat war un entremez . . . . .	102
3.2	Gwehanadur dargouezhel arskarek . . . . .	103
3.2.1	Tebekadur ha kevreizhenn dassammañ . . . . .	103
3.2.2	Skouerioù a wehanadurioù arskarek . . . . .	106
3.3	Gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek . . . . .	108

3.3.1	Kevreizhenn $F$ dirgendalc'hek . . . . .	108
3.3.2	Despizadur ar gwehanadur dirgendalc'hek . . . . .	108
3.3.3	Amveziadoù spirus evit ma ve $f$ un tebekter . . . . .	109
3.3.4	Tellun ar gwehanadur . . . . .	110
3.4	Gwehanadur dargouezhel kemmesk . . . . .	113
3.5	Gwehanadurioù dargouezhel kendalc'hek dibarek . . . . .	114
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Gwehanadur dargouezhel liesment</b>	<b>119</b>
4.1	Gwehanadur divvent. Hollekadurioù . . . . .	119
4.1.1	Despizadurioù . . . . .	119
4.1.2	Kendivizad all . . . . .	122
4.1.3	Perzhioù . . . . .	122
4.1.4	Naouusteroù ur gevreizhenn dassammañ . . . . .	124
4.1.5	Kevreizhenn dassammañ ha tebegezh ur c'hensturvaeg . . . . .	124
4.2	Gwehanadur divvent arskarek . . . . .	125
4.2.1	Kevreizhenn debekaot . . . . .	125
4.2.2	Kevreizhenn dassammañ . . . . .	127
4.2.3	Tebekadurioù marzel . . . . .	127
4.2.4	Dasparzhioù marzel . . . . .	128
4.2.5	Dasparzhioù a-zianouez . . . . .	129
4.2.6	Dizalc'h an div gedrann . . . . .	129
4.2.7	Hollekadur da $n$ ment . . . . .	130
4.3	Gwehanadur divvent dirgendalc'hek . . . . .	135
4.3.1	Kevreizhenn $F(x, y)$ dirgendalc'hek . . . . .	135
4.3.2	Gwehanadur divvent dirgendalc'hek. Tebekter gorreel . . . . .	135
4.3.3	Tebegezh ur reizhkorneg . . . . .	136
4.3.4	Tebegezh un domani Borel . . . . .	137
4.3.5	Tebekadurioù ha tebekterioù marzel . . . . .	138
4.3.6	Dasparzhioù a-zianouez . . . . .	140
4.3.7	Dizalc'h evit un daouac'h gwehanadurioù dargouezhel . . . . .	141
4.3.8	Ere kevreizhel . . . . .	142
4.3.9	Hollekadur da $n$ ment . . . . .	143
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	146

<b>5</b>	<b>Naouusterioù ur gwehanadur unvent</b>	<b>151</b>
5.1	Naouusterioù tued kreizel . . . . .	151
5.1.1	Pementranerioù . . . . .	151
5.1.2	Mod . . . . .	154
5.1.3	Engortoz jedoniel . . . . .	155
5.2	Naouusterioù strewadur . . . . .	165
5.2.1	Forc'had dizave keitat . . . . .	165
5.2.2	Strewant . . . . .	165
5.2.3	Lankadoù ankreizet . . . . .	167
5.2.4	Daveadur $m_k(X) = E(X^k)$ . . . . .	167
5.2.5	Lankadoù kreizet . . . . .	167
5.2.6	Reollun König ha lankadoù . . . . .	168
5.2.7	Kemm gwehanadur en engortozioù ha hebiantoù . . . . .	169
5.2.8	Gwehanadur dargouezhel kreizet direet . . . . .	170
5.2.9	Skouerioù a engortozioù hag a hebiantoù . . . . .	170
5.2.10	Lankadoù dasperiadel . . . . .	171
5.2.11	Al lankadoù e rezh sammegennoù Stieltjes . . . . .	172
5.2.12	Kevreizhenn c'haner lankadoù ur gwehanadur . . . . .	172
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	<b>175</b>
<b>6</b>	<b>Naouusterioù ur gwehanadur div- ha liesment</b>	<b>181</b>
6.1	Engortoz jedoniel . . . . .	181
6.1.1	Engortoz jedoniel un daouac'h . . . . .	181
6.1.2	Engortoz jedoniel sammad div gedrann un daouac'h . . . . .	182
6.1.3	Engortoz liesâd daou wehanadur dizalc'h . . . . .	183
6.2	Naouusterioù strewadur ha keflended . . . . .	184
6.2.1	Kehebiant . . . . .	184
6.2.2	Kehebiant gwehanadurioù dargouezhel dizalc'h . . . . .	186
6.2.3	Kehebiant ha hebiant . . . . .	186
6.2.4	Keflended linennek, keidadur . . . . .	188
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	<b>191</b>
<b>7</b>	<b>Ogedoù an hebiantoù ha kehebiantoù</b>	
	<b>Kevreizhennoù naouus d'ur gwehanadur dargouezhel</b>	<b>193</b>
7.1	Ogedoù an hebiantoù ha kehebiantoù . . . . .	193
7.1.1	Engortoz un oged . . . . .	193
7.1.2	Oged an hebiantoù ha kehebiantoù . . . . .	193

7.1.3	Oged keffended . . . . .	194
7.2	Kevreizhenn naouus d'ur gwehanadur dargouezhel . . . . .	195
7.2.1	Despizadurioù . . . . .	195
7.2.2	Rezhiennoù dibarek $\varphi(t)$ . . . . .	195
7.2.3	Perzhioù . . . . .	196
7.2.4	Dedalvezadur ar gevreizhenn naouus da jedadur al lankadoù . . . . .	196
7.2.5	Eil kevreizhenn naouus . . . . .	197
7.2.6	Kemm gwehanadur . . . . .	199
7.2.7	Jediñ an dassammantoù a-gevreizh d'al lankadoù kreizet . . . . .	200
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>201</b>
<b>8</b>	<b>Dasparzhioù arskarek standur . . . . .</b>	<b>203</b>
8.1	Dasparzh arskarek unvan . . . . .	203
8.1.1	Despizadur . . . . .	203
8.1.2	Naouusterioù . . . . .	204
8.2	Dasparzh binomel . . . . .	207
8.2.1	Despizadur . . . . .	207
8.2.2	Skouer . . . . .	207
8.2.3	Jediñ gwerzhadoù an tebekadur $P(X = k)$ . . . . .	207
8.2.4	Evezhiadennoù . . . . .	208
8.2.5	Doare all da gaout $P(X = k)$ . . . . .	208
8.2.6	Tebekadur binomel ha gwehanadur dargouezhel meneger . . . . .	209
8.2.7	Derc'hennadur kevregat . . . . .	209
8.2.8	Kevreizhenn c'haner ha kevreizhenn naouus . . . . .	210
8.2.9	Engortoz, hebiant, strewant . . . . .	210
8.2.10	Lankadoù kreizet . . . . .	211
8.2.11	Sammad daou wehanadur binomel a un tebekadur . . . . .	212
8.2.12	Naouusterioù ar gwehanadur aliested . . . . .	212
8.3	Dasparzh gourmentoniel . . . . .	213
8.3.1	Despizadur . . . . .	213
8.3.2	Naouusterioù an dasparzh gourmentoniel . . . . .	214
8.4	Dasparzh binomel leiel . . . . .	218
8.4.1	Despizadur . . . . .	218
8.4.2	Gwehanadur Pascal pe gwehanadur mentoniel . . . . .	220
8.4.3	Naouusterioù an dasparzh binomel leiel . . . . .	225
8.5	Dasparzh multinomel . . . . .	226
8.5.1	Despizadur . . . . .	226

8.5.2	Naouusterioù ar gwehanadur multinomel . . . . .	227
8.6	Dasparzh Poisson . . . . .	229
8.6.1	Despizadur . . . . .	229
8.6.2	Naouusterioù dasparzh Poisson . . . . .	230
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	239
<b>9</b>	<b>Dasparzhioù dirgendalc'hek standur</b>	<b>243</b>
9.1	Dasparzh kendalc'hek unvan . . . . .	243
9.1.1	Despizadur . . . . .	243
9.1.2	Naouusterioù an dasparzh kendalc'hek unvan . . . . .	243
9.1.3	Dasparzh reizhkorn . . . . .	244
9.2	Dasparzh $\gamma_\nu$ . . . . .	245
9.2.1	Despizadur . . . . .	245
9.2.2	Naouusterioù ar gwehanadur $\gamma_\nu$ . . . . .	247
9.2.3	Gwehanadur $\gamma_\nu(a, b)$ . . . . .	248
9.2.4	Genel ar gwehanadur $\gamma_\nu$ . . . . .	249
9.2.5	Kentañ dasparzh Laplace . . . . .	252
9.3	Dasparzh reol . . . . .	254
9.3.1	Dasparzh reol kreizet direct . . . . .	254
9.3.2	Dasparzh reol pe dasparzh Gauss . . . . .	259
9.4	Dasparzh log-reol . . . . .	266
9.4.1	Despizadur . . . . .	266
9.4.2	Naouusterioù an dasparzh log-reol . . . . .	266
9.4.3	Genel an dasparzh log-reol . . . . .	268
	<b>Poelladennoù</b> . . . . .	269

## STADEGOURIEZH DESKRIVAN

<b>10</b>	<b>Kengerc'h gwehanadurioù dargouezhel</b>	<b>271</b>
10.1	Dibarderioù . . . . .	271
10.1.1	Dibarder Markov . . . . .	271
10.1.2	Dibarder Bienaymé-Čebičev . . . . .	272
10.1.3	Rezhiennoù all dibarder Bienaymé-Čebičev . . . . .	272
10.2	Delakadennoù . . . . .	273
10.2.1	Delakadenn Bernoulli . . . . .	275
10.2.2	Hollekadur : delakadenn wan an niveroù bras . . . . .	278

10.2.3 Delakadenn an harz kreizet . . . . .	281
<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>283</b>
<b>11 Stadegouriezh deskrivañ. Hollekadurioù . . . . .</b>	<b>287</b>
11.1 Divoud ar stadegouriezh deskrivañ . . . . .	287
11.1.1 Digoradur . . . . .	287
11.1.2 Lankadoù ur studienn stadegel . . . . .	287
11.2 Poblañs, unvezioù stadegel, doareenn . . . . .	288
11.2.1 Poblañs ha hiniennoù . . . . .	288
11.2.2 Doareenn . . . . .	288
11.3 Stadekadur doareadel ha kementadel . . . . .	289
11.3.1 Stadekadur doareadel . . . . .	289
11.3.2 Stadekadur kementadel . . . . .	289
<b>12 Dasparzhioù stadegel unvent. Taolennoù stadegel, kevregoù . . . . .</b>	<b>291</b>
12.1 Dasparzh reveziadoù hag aliestedoù . . . . .	291
12.1.1 Reveziad hollel . . . . .	291
12.1.2 Dasparzh reveziadoù . . . . .	291
12.1.3 Dasparzh aliestedoù daveel . . . . .	293
12.2 Ingaladur reveziadoù hag aliestedoù . . . . .	294
12.2.1 Ingaladur reveziadoù . . . . .	294
12.2.2 Ingaladur aliestedoù . . . . .	296
12.2.3 Reveziadoù hag aliestedoù dassammet war zigresk . . . . .	297
12.3 Heuliadoù rummet . . . . .	297
12.3.1 Rummoù — Reveziad ur rummad . . . . .	297
12.3.2 Heuliad rummet . . . . .	298
12.3.3 Kevregoù . . . . .	299
12.3.4 Aliesteter (regel) . . . . .	299
12.3.5 Kevreizhenn dassammañ reveziadoù hag aliestedoù . . . . .	300
<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>304</b>
<b>13 Naouusterioù savlec'h ha strewadur . . . . .</b>	<b>307</b>
13.1 Naouusterioù tued kreizel . . . . .	307
13.1.1 Kreizad . . . . .	307
13.1.2 Mod . . . . .	309
13.1.3 Keitad . . . . .	309

13.1.4	Hollekadur ar c'heidad . . . . .	313
13.2	Naouusterioù strewadur . . . . .	319
13.2.1	Stewart . . . . .	319
13.2.2	Gwezhiader strewadur . . . . .	321
13.3	Naouusterioù strewadur all . . . . .	321
13.3.1	Ar pementannerioù . . . . .	321
13.3.2	Al lankadoù . . . . .	323
13.4	Naouusterioù stumm . . . . .	328
13.4.1	Gwezhiader ankemparzhder . . . . .	328
13.4.2	Gwezhiader tuzunder . . . . .	329
13.5	Naouusterioù ar meskadoù poblañsoù . . . . .	329
13.5.1	Diervad tregemmel . . . . .	330
13.5.2	Kevreizhenn dassammañ . . . . .	332
13.5.3	Kreizad . . . . .	333
13.5.4	Keitad . . . . .	335
13.5.5	Hebiant . . . . .	335
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>338</b>
<b>14</b>	<b>Stadekadurioù divvent. Argizañ ha keflended</b>	<b>341</b>
14.1	Dasparzhioù marzel hag a-zianouez, daveadurioù etre o naouusterioù . . . . .	341
14.1.1	Despizadur . . . . .	341
14.1.2	Aliested . . . . .	341
14.1.3	Derc'hennadur kevregat . . . . .	342
14.1.4	Dasparzhioù marzel . . . . .	342
14.1.5	Aliestedoù a-zianouez . . . . .	344
14.1.6	Keitadoù, hebiantoù, kehebiant . . . . .	345
14.2	Naouusterioù bloc'hel ur stadekadur divvent $(X, Y)$ . . . . .	349
14.2.1	Krommennoù argizañ . . . . .	349
14.2.2	Keñver keflended . . . . .	354
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>371</b>

## STADEGOURIEZH JEDONIEL

<b>15</b>	<b>Prizañ</b>	<b>375</b>
15.1	Divoud ar stadegouriezh jedoniel . . . . .	375



15.1.1	Standilhonañ . . . . .	375
15.1.2	Amkaniou . . . . .	375
15.2	Prizañ . . . . .	376
15.2.1	Perzhioù ur prizer . . . . .	376
15.2.2	Prizadur poentel . . . . .	377
15.2.3	Prizadur dre un entremez . . . . .	381
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>392</b>
<b>16</b>	<b>Prouadiñ . . . . .</b>	<b>397</b>
16.1	Prouadiñ goulakadoù . . . . .	397
16.1.1	Erouezadur hollek . . . . .	397
16.1.2	Prouad ar $\chi^2$ . . . . .	406
16.2	Prouadoù keñveriañ . . . . .	414
16.2.1	Keñveriañ div aliested . . . . .	414
16.2.2	Keñveriañ daou geitad . . . . .	417
16.2.3	Keñveriañ hebiantoù . . . . .	423
	<b>Poelladennoù . . . . .</b>	<b>449</b>

## TAOLENNOÙ HA MENEGVA

<b>17</b>	<b>Taolennoù . . . . .</b>	<b>461</b>
17.1	Taolenn 1 . . . . .	463
17.1.1	Kevreizhenn ingalañ an dasparzh reol kreizet direet . . . . .	463
17.1.2	Taolenn evit gwerzhadoù bras $x$ . . . . .	464
17.2	Taolenn 2 . . . . .	464
17.3	Taolenn 3 . . . . .	465
17.4	Taolenn 4 . . . . .	465
17.5	Taolenn 5 . . . . .	467
17.6	Taolenn 6 . . . . .	468
17.7	Taolenn 7 . . . . .	469
17.8	Taolenn 8 . . . . .	470
17.9	Taolenn 9 . . . . .	470
17.10	Taolenn 10 . . . . .	471
17.11	Taolenn 11 . . . . .	472
17.12	Taolenn 12 . . . . .	473

<b>Menegva</b>	<b>475</b>
Brezhoneg-Galleg . . . . .	477
Brezhoneg-Galleg . . . . .	479



## KENTSKRID

Hep ket a var ez eo diorreidigezh ar Stadegouriezh ha Riñverezh an tebeoù unan eus dezverkoù hon amzervezh. O c'havout a reer e pep lec'h, en amaezhiañ Stad, en ardeñ kevredadoù, en imbourc'h skiantel, en armerzh koulz hag er politikerezh, evel er sontadurioù da vare an dilennadegoù da skouer. Deuet eo ar Stadegouriezh da vezañ un elfenn a bouez eus gouiziadur hollek hon amzer. Gant lammgresk ar c'halvezerezhioù e domanioù evel ar Vevoniezh volekulel, ar Vezekniezh, an Derc'hanouriezh, h.a., ez eo splann o devez ar Stadegouriezh hag an Debegouriezh ur roll bras ouzh bras. Kel a vez mui ouzh mui ag andiended ha ned eo ket mui ar Skiant bali veur an araokaat o c'hrataat dimp antronozioù baradozek. Dav engwerc'hañ an dargouezh en ur gounañ atav emañ ar glaoustre e diazez pep embregadenn. Mard eo bet lusket an Debegouriezh en derou diwar gudennoù o tennañ d'ar c'hoari ez eo deuet ar Stadegouriezh da vezañ un araez galloud etre daouarn ar Stadoù hag an damanioù all, evel ar Jedoniezh dre vras a du 'rall.

Ar stadegouriezh deskrivañ zo he amkan keweriañ ar stlenn dastumet diwar ur boblañs en ur stumm kementadel, korvodus a eil lankad dre ar Stadegouriezh jedoniel. En amboaz-se ez eo bet diorreet an Debegouriezh, war-benn studiañ ar gwikefreoù dargouezhel. Diazezet war geal an debegezh ez eo bet aksiomatekaet diwar div vonaksiomenn: aksiomennoù an tebeoù hollek ha kenaozat. Jedoniel rik eo an diskiblezh-mañ, hogen he hanc'herieg a chom merket don gant an dave d'al louer, pezh a c'hell bezañ trellus meur a wech, evit ar jedoniour zoken, re voaziet gant ar savelegezh. Splann eo al liammoù etre ar bed gwerc'hel hag e zelvanañ jedoniel evit a sell domanioù a'r Jedoniezh evel ar Stadegouriezh hag an Debegouriezh.

Ar Stadegouriezh jedoniel a denn d'an anren stadegel, eleze da elfennadur ar stlenn gounezet a hent all da heul ur wikefre dargouezhel. Dre harpañ war zelvanoù tebegouriel e klasker *jediñ* naouusterioù hollek ar boblañs orin.

Ar brezhoneg zo un araez evit neveziñ hon sell hag hon denesadur ouzh an diskiblezhioù-se. Er yezhoù diazezet ez eus anv a Gl. *variable*, Al. *Variable* pe Sz. *variate* a ra dave d'an argemm. Dindan emañ keal ar Gl. *loi* Sz. *law* Al. *Gesetz*, termenoù a gaver c'hoazh er Stadegouriezh hag en Debegouriezh er yezhoù-se. Hogen gant keal an *argemm* e c'houlakaer ur saveleñn e par al louer hag e koll an dargouezh e staelad. Splann eo an amkan mestroniañ an dargouezh aze.ã

Kavout a ra dimp ez eo keal an *dasken* an hini azasañ d'ober meiz war ar pezh a c'hoarvez e par al louer. N'eus ket gwerzhadoù un argemmenn eus ar muzulioù gorreet diwar ur boblañs, hogen gwerzhadoù unveziat andesavelet a-gentouez, disoc'h ur wikefre dargouezhel. E se disoc'h seurt gwikefre zo ur gwehanadur dargouezhel pe stadegel. E domani ar Jedoniezh ez eo tra ar jedoniour gwehaniñ an unvezioù dre ardaoliñ dezho gwerzhadoù, eleze ez eo ar gwehanadur dargouezhel un arloadur eus teskad an unvezioù (an hiniennoù) da deskad ar gwerc'helion  $\mathbb{R}$  pe  $\mathbb{R}^n$ . E domani al louer, eleze e par ar Stadegouriezh deskriavañ, ez eo ar gwehanadur disoc'h an dargouezh ent eeun, a ro meur a stumm evit ur furm hervez un dasparzh stadegel.

E dibenn al levr e vo kavet un nebeut taolennoù gwerzhadoù, a dalvezo ivez d'ober ar poelladennoù kinniget evit pep chabistr. Ment an oberenn-mañ ne ro ket an tu da lakaat diskoulmoù ar poelladennoù, ha kement-se a ray danvez ul levr all. Evel e Jedoniezh I e soñj dimp e vo talvoudus ar menegvaoù divyezhek a vo kavet e dibenn al levr.

TEBEGOURIEZH



# 1

## Eriñvañ. Kevosodouriezh Binom Newton

### 1.1 TESKAD BEVENNEK A BRIÑVEL $n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

#### 1.1.1 Priñvel un teskad bevennek $E$ (niver e elfennoù)

##### 1.1.1.1 Teskadoù kengoulud

Kengoulud eo  $E$  ha  $F$  mard eus ur c'hesaezhadur eus an eil war egile.

##### 1.1.1.2 Teskad bevennek

Un teskad bevennek eo  $E$  mard eo kengoulud da  $[1, n]$ , eleze teskad  $1, 2, \dots, n$  an  $n$  niver kevan kenheuilh bihanoc'h pe bar ouzh  $n$  hag anvannel.

Lavarout  $f$  zo ur c'hesaezhadur eus  $[1, n]$  war  $E$  a dalvez ez eo  $f$  un arloadur, hevelep m'en deus pep elfenn ag  $E$  ur c'hentorad unel en  $[1, n]$ . E gerioù all : pep elfenn ag  $E$  zo delvad ur c'hevan unel dre  $f$ , ha notañ a reer  $p \mapsto x_p$ . Eleze pep elfenn ag  $E$  zo ibiliet gant un elfenn ag  $[1, n]$  ha priñvel  $E$  zo niver  $n$  bevennek an elfennoù ag  $E$ . Teskad ar menegoù pe teskad ibiliañ a anver an teskad  $[1, n]$ .

**EVEZHIADENN** — Mard eo  $E$  un teskad bevennek ha mard eo  $F$  kengoulud da  $E$ , neuze ez eo bevennek  $F$  ha dezhañ an un priñvel hag  $E$ . E gwir, mar bez ur c'hesaezhadur  $f$  eus  $[1, n]$  war  $E$  ha mar bez ur c'hesaezhadur  $g$  eus  $E$  war  $F$ , neuze ez eo  $g \circ f$  ur c'hesaezhadur adal  $[1, n]$  war  $F$ , eleze  $\text{Card}(F) = n$ .



**DESPIZADUR** — Liesâd  $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$  an  $n$  kevan kentañ a noter  $n!$  ha lenn a reer dasperiod  $n$ . Dre gendivizad:  $0! = 1$ . Ar gevreizhenn eus  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}$  a c'hell bezañ savelet ivez dre un araezad askizat:  $0! = 1$  ha  $n! = n \times (n-1)!$ , evit  $n \geq 1$ .

## 1.1.2 Perzhioù priñvelion an teskadoù bevennek

### 1.1.2.1 Delakadenn

Mard eo  $E$  ha  $F$  daou deskad bevennek, neuze ez eo bevennek  $E \cap F$  hag  $E \cup F$ .  
Mard eo  $E \subseteq F$ , neuze ez eo  $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$ .

### 1.1.2.2 Delakadenn

Mard eo  $E$  ha  $F$  daou deskad diforz,ha,

$$\boxed{\text{Card}(E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card}(E \cap F)}.$$

### 1.1.2.3 Delakadenn

Mard eo  $E$  ha  $F$  daou deskad bevennek diforz,ha:

$$\boxed{\text{Card}(E \times F) = (\text{Card } E) \times (\text{Card } F)}.$$

An delakadenn-mañ a ro priñvel liesâd kartezel daou deskad, eleze teskad an daouac'hoù  $(x, y)$ , hevelep ma'z eo  $x \in E$  ha  $y \in F$ . Arveret e vez alies er c'hudennoù amprouennoù arreet.

Ent dibarek,  $\text{Card}(A \times A) = (\text{Card } A)^2$ ,  $\text{Card}(A \times A \times A) = (\text{Card } A)^3$ , h.a.

A se:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Card}(A^n) = (\text{Card } A)^n}.$$

Pouezus kenan eo ivez an delakadenn darbennet amañ dindan (sl. 1.1.4.3) a zifer amplegadoù un ensaezhadur eus  $A$  e  $B$ , un arsaehadur eus  $A$  war  $B$  hag a verk kement-mañ: mard eo  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ , neuze nep ensaezhadur eus  $A$  e  $B$  (pe nep arsaehadur eus  $A$  war  $B$ ) zo ur c'hesaezhadur. Evit kounañ an amplegadoù: bezet daou deskad bevennek  $A$  ha  $B$  hag un ensaezhadur eus  $A$  e  $B$ , neuze div elfenn anpar ag  $A$  zo dezho delvadoù anpar e  $B$ , pezh nad eo bezus nemet mar bez e  $B$  kement a elfennoù hag en  $A$  d'an nebeutañ, eleze

$\text{Card}(B) \geq \text{Card}(A)$ . Heñvel dra, evit ma ve un arsaehadur eus  $A$  war  $B$  ez eo ret ma ve nep elfenn a  $B$  delvad un elfenn ag  $A$  d'an nebeutañ (hag un elfenn enbeziat en  $A$  ne c'hell ket kaout lies delvad, anez ne ve ket kevreizhel an daveadur). Neuze ez eo ret ma ve en  $A$ , d'an nebeutañ, kement a elfennoù hag e  $B$ , eleze  $\text{Card}(A) \geq \text{Card}(B)$ .

### 1.1.3 Skorlakadenn — pe pennaenn — ar vesaerion

Bezot  $E$  un teskad bevennek a briñvel  $n \geq 1$ . Desellomp ar gevreizhenn arstalek  $\chi_E : E \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 1$ . Gwiriañ a reer dre zarren war  $n$  an daveadur diazez-mañ:

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} \chi_E(x), \quad (1.1)$$

a rezhienner a-wechoù:  $\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} 1$ . A se e tezreer:

• **Pennaenn ar vesaerion**<sup>1</sup>:

Bezot  $E$  un teskad bevennek ha  $(F_i)_{i \in I}$  ul lodennadur eus  $E$  (ma'z eo  $I$  un teskad bevennek). Neuze:

$$\text{Card}(E) = \sum_{i \in I} \text{Card}(F_i). \quad (1.2)$$

Ent dibarek, mard eo  $\mathcal{F}$  ur parzh eus  $\mathfrak{P}(E)$  — teskad ar parzhioù eus  $E$  — ampartet gant teskadoù disparti, hevelep ma'z eo  $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = E$  e teu:

$$\boxed{\text{Card}(E) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \text{Card}(A)}.$$

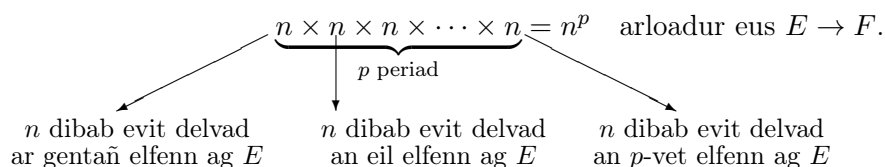
An teir delakadenn eus ar c'hevarad 1.1.2, an daveadurioù (1.1) hag (1.2) eus ar c'hevarad [1.1.3] ha pennaenn ar vesaerion a ampar diazez an dezrannouriezh kevosodel, anvet c'hoazh *kevosodouriezh*.

<sup>1</sup> Evit jediñ niver an deñved eus un tropellad e spir kontañ niver ar pavioù ha rannañ dre bevar da heul!

### 1.1.4 Eriñvañ an arloadurioù, ensaezhadurioù hag kesaezhadurioù eus $E$ da $F$ , daou deskad bevennek hevelep ma'z eo $\text{Card}(E) = p$ ha $\text{Card}(F) = n$ ( $n \neq 0$ ha $p \neq 0$ )

#### 1.1.4.1 Niver an arloadurioù eus $E \rightarrow F$

Un arloadur  $f$  eus  $E$  war  $F$  zo savelet gant ar  $p$  delvad en  $F$  ag ar  $p$  elfenn enbeziat en  $E$  (dre un arloadur  $f$  en deus pep elfenn ag  $E$  un delvad en  $F$ , hogen div elfenn anpar ag  $E$  a c'hell kaout an un delvad, ma n'eo ket ensaezhat  $f$ ). Kement a arloadurioù bezus zo enta eus  $E$  da  $F$  ha ma'z eus a zibaboù bezus en  $F$  da zelviñ pep elfenn ag  $E$ . Hogen  $n$  elfenn zo en  $F$ , da heul evit pep hini ag ar  $p$  elfenn enbeziat en  $E$  ez eus  $n$  dibab bezus. Neuze ez eriñver:



E-touez an arloadurioù-se, reoù zo ensaezhat mar  $p \leq n$ , reoù all n'int ket ha mar  $p > n$ , hini ebet eus an arloadurioù-se ned eo ensaezhat.

Bennoz d'ur poellata dre zarren war  $p$  e c'haller dezren rik an disoc'h-se, hon eus roet un alberz nadel anezhañ.

**SKOUER** — Evit eriñvañ an niveroù peder sifrenn a c'haller sevel diwar an nav sifrenn: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e tegaser an teskad  $\{a, b, c, d\} = E$  hag an teskad  $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Sevel un niver peder sifrenn gant an nav sifrenn a c'hoarvez a savelañ un arloadur eus  $E$  da  $F$ . Kement a niveroù peder sifrenn zo enta hag a arloadurioù eus  $E$  da  $F$ , eleze  $9^4$  [ $\text{Card}(F) = 9$  ha  $\text{Card}(E) = 4$ ].

#### Despizadur — Arenkad gant arreadoù

Un arenkad  $p$  elfenn eus un teskad angoullo  $F$  gant arreadoù zo un arloadur eus  $\{1, 2, \dots, p\}$  war  $F$ .

Un arenkad  $p$  elfenn dibabet a-douez  $n$  elfenn un teskad  $F$  gant arreadoù zo despizet enta dre ur staladur urzhiet — gant arreadoù diouzh an dro — amparet gant  $p$  a-douez an  $n$  elfenn eus  $F$ :  $p$  elfenn zo en holl en un arenkad gant arreadoù, en un urzh savelek, reoù 'zo o revout meur a wech (betek  $p$  gwech).

Un arenkad gant arreadoù a c'hell bezañ desellet evel ul liesac'h amparet gant  $p$  elfenn eus  $F$ , ur  $p$ -ac'h a zo-hi un elfenn eus  $F^p$ . Alese niver an arenkadoù  $p$  elfenn a-douez  $n$  gant arreadoù:  $A_n^p = n^p$ . Notañ a reer a-wechoù  $a^*(n, p)$ . Lavarout a reer ivez ez eo ar  $p$ -ac'h-se ur  $p$ -lerc'hiad. Merzhout e c'hell  $p$  bezañ brasoc'h eget  $n$  e degouezh an arenkadoù gant arreadoù.

#### 1.1.4.2 Niver an arloadurioù ensaezhat eus $E$ [ $\text{Card}(E) = p$ ] en $F$ [ $\text{Card}(F) = n$ ], gant $p \leq n$

Un ensaezhadur  $f$  eus  $E$  en  $F$  zo savelet dre ar  $p$  delvad a'r  $p$  elfenn enbeziat en  $E$ . P'o deus div elfenn anpar ag  $E$  delvadoù anpar ez eus  $n$  delvad bezus evit ar gentañ elfenn ag  $E$ ,  $(n-1)$  evit an eil,  $(n-2)$  evit an trede, ...,  $n-(p-1)$  evit ar  $p$ -vet. Neuze:

**DISOC'H DA C'HOUZOUT** — Niver an ensaezhadurioù zo

$$A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1).$$

Rezhienn all:

$$A_n^p = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)[(n-p)(n-p-1) \cdots 1]}{[(n-p)(n-p-1) \cdots 1]}.$$

A se:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

**SKOUER** — Evit eriñvañ an niveroù kevan peder sifrenn unreveziat a c'haller sevel diwar an nav sifrenn  $F = \{1, \dots, 9\}$  e vo graet evel amañ diaraok, hogen en degouezh-mañ ne vo dalc'het stad nemet eus an arloadurioù ensaezhat adal  $E = \{a, b, c, d\}$  d'an teskad  $F = \{1, \dots, 9\}$  (arloadurioù o reiñ da  $a, b, c$  ha  $d$  delvadoù anpar). A se e jeder  $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$ . Diwar vont, niver ar c'hevanion peder sifrenn savet gant sifrennoù  $F$  hag enno ur sifrenn daoureveziat d'an nebeutañ zo par d'an diforc'h etre  $9^4$  hag  $A_9^4$ .

#### Despizadur — Arenkad hep arread

Bezetañ  $F$  un teskad bevennek angoullo a briñvel  $n$  ha  $p$  ur c'hevan naturel anvannel ( $p \leq n$ ). Anvet e vez arenkad  $p$  elfenn ag  $F$  hep arread nep ensaezhadur eus  $\{1, 2, \dots, p\}$  en  $F$ .

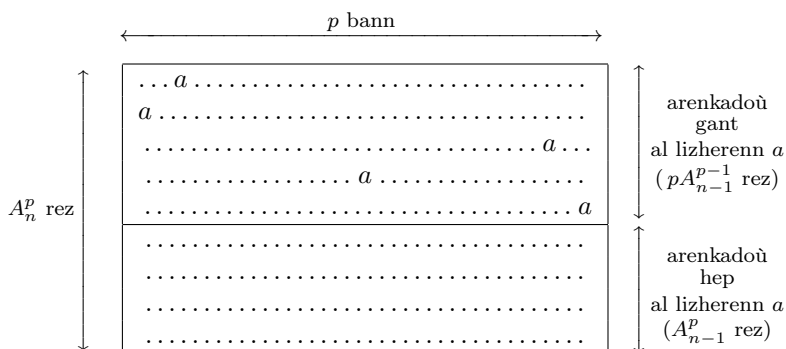
Despizañ a reer ivez an arenkad hep arread evel ur  $p$ -lerc'hiad a elfennoù un-reveziat. A se ez eo anpar daou arenkad dre natur an ergorennoù a zo ennañ pe dre an urzh anezho, eleze o ibiliadur.

O vezañ ma'z eo niver an ensaezhadurioù eus  $E = \{1, 2, \dots, p\}$  en  $F$  par da  $A_n^p$  ( $\text{Card}(F) = n$ ), niver an arenkadoù  $p$  elfenn ag  $F$  zo par ivez da  $A_n^p$ . Dav kounañ atav e vez engwerc'het an urzh gant un arenkad, pep elfenn o kaout ur renk er staladur. Notet e vez niver an arenkadoù hep arread  $A_n^p$ ,  $n^{[p]}$ ,  $(n)p$ , pe  $a(n, p)$ .

**Dienadur dre zarren**

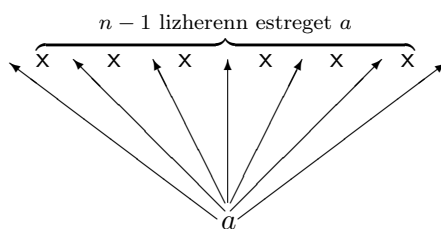
Ned eo ket aner diskouez un doare all da jediñ niver an arenkadoù hep arread. Sed enta un dienadur dre zarren :

Desellomp teskad an  $A_n^p$  arenkad  $p$  lizherenn dibabet a-douez un teskad  $n$  lizherenn, renket an eil dindan egile evit amparañ ur rezi ennañ  $A_n^p$  rez.



Daou zoare zo da eriñvañ niver an arenkadoù enno al lizherenn  $a$ :

1. Niver an arenkadoù gant al lizherenn  $a$  zo par da niver al lizherennoù  $a$  er rezi, pa na c'haller ket kaout div wech ul lizherenn en un arenkad. Par eo niver pep lizherenn, p'o deus an un staelad. O vezañ ma'z eus  $pA_n^p$  lizherenn er rezi e jeder niver pep lizherenn :  $\frac{pA_n^p}{n}$ . A se ez eus  $\frac{p}{n}A_n^p$  arenkad enno al lizherenn  $a$ .
2. Desellomp bremañ an  $A_{n-1}^{p-1}$  arenkad  $p - 1$  lizherenn dibabet a-douez an  $n - 1$  lizherenn estreget  $a$ . Diwar pep hini eus an arenkad-se e c'haller amparañ  $p$  arenkad  $p$  lizherenn a-douez  $n$ , enno al lizherenn  $a$  evel a weler amañ dindan :



Da neuze, niver an arenkadoù a-douez  $A_n^p$  enno al lizherenn  $a$  zo par da:  $pA_{n-1}^{p-1}$ . Da heul:

$$pA_{n-1}^{p-1} = \frac{p}{n} A_n^p .$$

A se:

$$\begin{aligned}
 A_n^p &= nA_{n-1}^{p-1} \\
 A_{n-1}^{p-1} &= (n-1)A_{n-2}^{p-2} \\
 \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\
 A_{n-p+2}^2 &= (n-p+2)A_{n-p+1}^1 .
 \end{aligned}$$

Dre liesaat e teu:

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+2)A_{n-p+1}^1 .$$

Hogen  $A_{n-p+1}^1 = n-p+1$ , niver an dibaboù eus un elfenn a-douez  $n-p+1$ . Da heul:

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)} .$$

Merzhout ivez e tisoc'her gant un daveadur darren sammadel:

$$A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1} .$$

**1.1.4.3 Niver an arloadurioù kesaezhat eus  $E$  [ $\text{Card}(E) = n$ ] war  $F$  [ $\text{Card}(F) = n$ ]. Kevamsavadurioù**

**Delakadenn (darbennet)** — Evit ma ve ensaezhat un arloadur  $f$  eus  $E$  war  $F$  ez eo ret ma ve  $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$  hag evit ma ve arsaezhat an arloadur  $f$  ez eo ret ma ve  $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$ . A se, evit ma ve  $f$  ur c'hesaezhadur ez eo ret ma ve  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ , pezh a dalvez ne c'hell bezañ ur c'hesaezhadur  $f$  eus  $E$  war  $F$  —  $E$  ha  $F$  o vezañ daou deskad bevennek — nemet mar bez dezho an un priñvel.

Ouzhpenn se ez eo spirus ma ve ensaezhat (pe arsaezhat) an arloadur evit ma ve kesaezhat mar bez  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ . Niver an arloadurioù ensaezhat zo

neuze  $A_n^p$  ( $n = p$ ). Alese an disoc'h-mañ, pa vez  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ : niver an arloadurioù kesaezhat eus  $E$  war  $F$  zo par da :

$$\boxed{A_n^n = n(n-1) \cdots (n-n+1) = n!} .$$

Ent dibarek, mard eo  $E = F$  [an amveziad  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$  zo kefleuniet], niver an arloadurioù kesaezhat eus  $E$  en  $E$  (anvet kevamsavadurioù  $E$  pe war  $E$ ) zo par da :

$$\boxed{P_n = n!} .$$

Notañ ne empleg ket  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$  ez eo kesaezhat nep arloadur  $f$  eus  $E$  da  $F$ .

**EVEZHIADENN** — Ur c'hevamsavadur war  $E$  zo ur c'hesaezhadur eus  $E$  war  $E$ . Alies e vez notet ur c'hevamsavadur  $\sigma$  war  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} .$$

E se ez eo arveridik derc'hennañ ur c'hevamsavadur dre an  $n$ -ac'h delvad an  $n$ -ac'h ( $1, 2, \dots, n$ ). Notet e vez niver ar c'hevamsavadurioù war  $E$ :  $A_n^n$  pe  $P_n$  pe  $p(n)$ .

**EVEZHIADENN** — Ar c'hevamsaviñ a gaver er poelladennoù pa vez kel a renkañ e mod pe vod an  $n$  elfenn eus an teskad (amparañ gerioù  $n$  lizherenn diwar an  $n$  lizherenn eus an teskad, amparañ niveroù gant sifrennoù, h.a.).

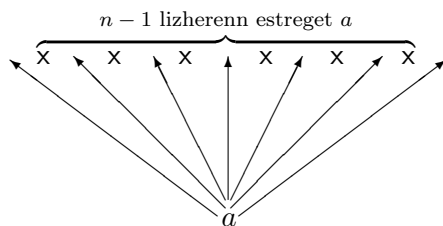
### Dienadur dre zarren

Bezot un teskad  $n$  elfenn digemmadus :

$$\{a, b, \dots, s\}.$$

Anvet e vez kevamsavadur hep arread eus an  $n$  elfenn-se — alies ne spisaer ket *hep arread* — ur staladur urzhiet eus teskad an  $n$  elfenn-se. E-se, e pep kevamsavadur hep arread e revez pep elfenn ur wech hepken en un urzh savelek.

Desellomp ar  $P_{n-1}$  kevamsavadur amparet war-bouez an  $n-1$  lizherenn estreget  $a$ . Diwar pep hini anezho e c'haller sevel  $n$  a-douez ar  $P_n$  kevamsavadur hep arread; awalc'h eo ouzhpennañ  $a$  en unan eus an  $n$  savlec'h gallus: dirak al lizherenn gentañ, etre an hini gentañ hag an eil, ..., war-lerc'h an  $(n-1)$ -vet lizherenn:



N'eus e seurt doare da c'henel ar  $P_n$  kevamsavadur eus  $n$  lizherenn diank ebet, na gourleizh naket. Da neuze:  $P_n = nP_{n-1}$ .

A se:

$$\begin{aligned}
 P_{n-1} &= (n-1)P_{n-2} \\
 \dots\dots &\dots\dots\dots \\
 P_2 &= 2P_1.
 \end{aligned}$$

Dre liesaat e teu:

$$P_n = n(n-1)\dots 2P_1 = n!P_1.$$

Hogen par eo  $P_1$  da 1: niver an doareoù da stalañ un elfenn unel. Neuze:

$$\boxed{P_n = n!}.$$

Dav eo diwall avat en degouezhioù ma'z eus en teskad lies elfenn andigemmadus. Ar gudenn-se a welomp amañ dindan.

**Despizadur — Kevamsavadur gant arreadoù**

En dro-mañ e teseller un teskad  $n$  elfenn amparet gant  $k$  isteskad disparti ha digemmadus ( $k \leq n$ ), enno elfennoù andigemmadus o revout  $n_1, n_2, \dots, n_k$  gwech gant  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Anvet e vez kevamsavadur gant arreadoù eus an  $n$  elfenn ur staladur urzhiet eus an  $n$  elfenn o revout  $n_1, n_2, \dots, n_k$  gwech.

**Delakadenn** — Niver  $p(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$  ar c'hevamsavadurioù eus  $n$  elfenn gant  $n_1, n_2, \dots, n_k$  arread zo:

$$\boxed{p(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}}.$$

E gwir, mar befe erlec'hiet elfennoù digemmadus ouzh pep hini eus an  $n_v$  elfenn ( $v \in \{1, 2, \dots, k\}$ ) elfenn andigemmadus e ve ret liesaat niver ar c'hevamsavadurioù dre  $n_v!$ .



Alese:  $p(n; n_1, n_2, \dots, n_k) \cdot n_1! n_2! \cdots n_k! = n!$  .

**SKOUER** — Pet tregejad a c'haller sevel diwar lizherennoù ar ger ANATAAT?

$p(7; 4, 2, 1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105$  tregejad eus ar ger ANATAAT.

## 1.2 TESKAD $\mathfrak{P}(E)$ AN ISTESKADOÙ EUS UN TESKAD BEVENNEK $E$

### 1.2.1 DESPIZADURIOÙ

#### 1.2.1.1 Aksiomenn teskad an isteskadoù

Evit nep teskad  $E$  ez eus un teskad notet  $\mathfrak{P}(E)$  a zo teskad an holl isteskadoù — pe parzhioù — eus  $E$ . Evit nep teskad  $E$ , bezoud un teskad  $\mathfrak{P}(E)$  a zo e elfennoù parzhioù  $E$  zo un aksiomenn eus damkaniezh an teskadoù.

Ar c'henskejadur, ar c'hembodadur, an diforc'h hag an diforc'h kemparzhiek zo dezvoù kediañ diabarzh e  $\mathfrak{P}(E)$ . Notañ ez eo  $\text{Card } \mathfrak{P}(E) = 2^{\text{Card}(E)}$ .

**EVEZHIADENN** — O vezañ ma'z eo  $E \subseteq E$  hag ivez  $\emptyset \subset E$  evit nep teskad  $E$  e vo neuze  $E \in \mathfrak{P}(E)$  hag  $\emptyset \in \mathfrak{P}(E)$ . Er c'heñver-se, notañ mat arver arouez ar gannadur  $\subset$  evit dezgeriañ ez eo  $A$  o c'henniñ  $E$  ( $A \subset E$ ) ha hini an enbeziadezh  $\in$  evit skrivañ ez eo  $A$  enbeziat e teskad ar parzhioù eus  $E$  [ $A \in \mathfrak{P}(E)$ ].

**SKOUER** — Skrivet e vo — mard eo  $E \emptyset$  — ez eo un elfenn  $x$  en  $E$ :  $x \in E$ . Hogen an teskad  $A = \{x\}$  zo o c'henniñ  $E$ :  $\{x\} \subset E$ . heñvel dra:  $\{x\} \in \mathfrak{P}(E)$ .

#### 1.2.1.2 Aksiomenn entalañ

Deurus e vez alies savelañ un isteskad  $A$  eus un teskad  $E$  — un elfenn diforzhañ anezhañ o vezañ notet  $x$  — dre ur perzh bennak  $p$  a zigemm elfennoù  $A$  diouzh an elfennoù all eus  $E$ . Da skouer bezañ ampar evit un niver kevan zo ur perzh digemmus.

Rezhiennet e vo neuze  $A \in \mathfrak{P}(E)$  evel-henn:  $A = \{x \in E \mid p(x)\}$ . E se ez eo  $A$  teskad an elfennoù  $x$  eus  $E$  dezho ar perzh  $p$ .

### 1.2.1.3 Despizadurioù niñvadurioù diabarzh e $\mathfrak{P}(E)$

**1. Klokadur** — Savelañ a reer un niñvadur unadek e  $\mathfrak{P}(E)$  anvet *klokadur* : arloet ouzh ur parzh  $A$  eus ur bondeskad  $E$  en deus da zisoc'h klokaenn  $A$  en  $E$ , notet  $\bar{A}$  pe  $\complement_E A$ . Neuze:

$$\bar{A} = \complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} \quad \text{pe gant} \quad A = \{x \in E \mid p(x)\},$$

e vo

$$\bar{A} = \{x \in E \mid \neg p(x)\} .$$

**2. Kenskejadur** — Savelañ a reer un niñvadur daouadek e  $\mathfrak{P}(E)$  anvet *kenskejadur* : arloet ouzh an div niñvuzenn  $A$  ha  $B$ , isteskadoù eus  $E$ , e ro da zisoc'h teskad an elfennoù enbeziat en  $A$  ha  $B$  war un dro. Notañ a reer :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ hag } x \in B\},$$

pe, mard eo

$$A = \{x \in E \mid p(x)\} \quad \text{ha} \quad B = \{x \in E \mid q(x)\},$$

ez eus

$$A \cap B = \{x \in E \mid p(x) \text{ ha } q(x)\} .$$

$A \cap B$  a reer kenskejadur an daou isteskad  $A$  ha  $B$  eus  $E$ . Mar bez  $A \cap B = \emptyset$  e lavarer ez eo disparti  $A$  ha  $B$ .

**3. Kembodadur** — Savelañ a reer un niñvadur daouadek e  $\mathfrak{P}(E)$  anvet *kembodadur* : arloet ouzh an div niñvuzenn  $A$  ha  $B$ , isteskadoù eus  $E$ , e ro da zisoc'h teskad an elfennoù enbeziat en  $A$  pe  $B$  pe en daou war un dro. Skrivañ a reer :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ pe } x \in B\},$$

hag ivez

$$A \cap B = \{x \in E \mid p(x) \text{ pe } q(x)\}.$$

$A \cup B$  a reer kembodadur an daou isteskad  $A$  ha  $B$  eus  $E$ .

**EVEZHIADENN** — Ar c'henskejadur hag ar c'hembodadur zo ivez daou zaveadur eus  $[\mathfrak{P}(E)]^2$  etrezek  $\mathfrak{P}(E)$ . Lavarout a reer ivez ez int dezvoù kediañ diabarzh

pe niñvadurioù diabarzh e  $\mathfrak{P}(E)$ . Denaat a reer ez eo  $\cap$  dasparzhat e-keñver  $\cup$  hag a-geveskemm. Denaat a reer ivez dezvoù De Morgan:

$$\boxed{A \cup B = \overline{A \cap B} \quad \text{hag} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}.$$

An dienadur a ra dave d'ar perzhioù mezoniel da heul:

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q \quad \text{hag} \quad \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q.$$

**4. Parzhadur un teskad** — Ur parzhadur eus  $E$  zo un isteskad eus  $\mathfrak{P}(E)$  amparet gant parzhioù angoullo disparti an eil diouzh egile a zo o c'hembodadur par da  $E$ . Da skouer, mard eo  $A \emptyset$ ,  $\{A, \overline{A}\}$  a ampar ur parzhadur eus  $E$ , rak  $A \cap \overline{A} = \emptyset$  hag  $A \cup \overline{A} = E$ . Heñvel dra mard eo  $\text{Card}(E) = n$  gant  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , an  $n$  isteskad  $\{x_1\}$ ,  $\{x_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{x_n\}$  a ampar ur parzhadur eus  $E$ .

### 1.2.2 NIVER AN ISTESKADOÙ A BRIÑVEL $p$ ( $p \leq n$ ) EUS UN TESKAD BEVENNEK $E$ A BRIÑVEL $n$ . KEVOSODADOÙ

#### 1.2.2.1 Delakadenn

Niver an isteskadoù (anvet ivez parzhioù) enno  $p$  elfenn eus un teskad  $E$   $n$  elfenn ennañ zo:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p(p-1) \cdots 1}}.$$

A-wechoù e noter ivez  $C_n^p$  niver  $\binom{n}{p}$  ar  $p$ -parzhioù.

Ur c'hevosodad  $p$  elfenn eus  $E$  zo nep parzh eus  $E$  ennañ  $p$  elfenn. A se, niver ar c'hevosodadoù zo hini an isteskadoù, eleze  $\binom{n}{p}$ .

#### 1.2.2.2 Dienadur

##### 1. Dre niver an arenkadoù $A_n^p$

Dav kounañ e c'hell un isteskad  $A$  ennañ  $p$  elfenn bezañ urzhiet e  $p!$  doare, rak  $p!$  kevamsavadur zo war  $A$ . Hogen pep isteskad urzhiet ennañ  $p$  elfenn eus  $E$  zo un arenkad  $p$  elfenn eus  $E$  ( $\text{Card}(E) = n$ ). Neuze, evit pep isteskad  $A$  ennañ  $p$

elfenn ez eus  $p!$  arenkad diwar elfennoù an isteskad  $A$ -se. E se e tewerzher niver an arenkadoù  $p$  elfenn eus  $E$  o liesaat dre  $p!$  niver an isteskadoù enno  $p$  elfenn eus  $E$ , pezh a zisoc'h gant an niver  $\binom{n}{p}$  amañ diaraok.

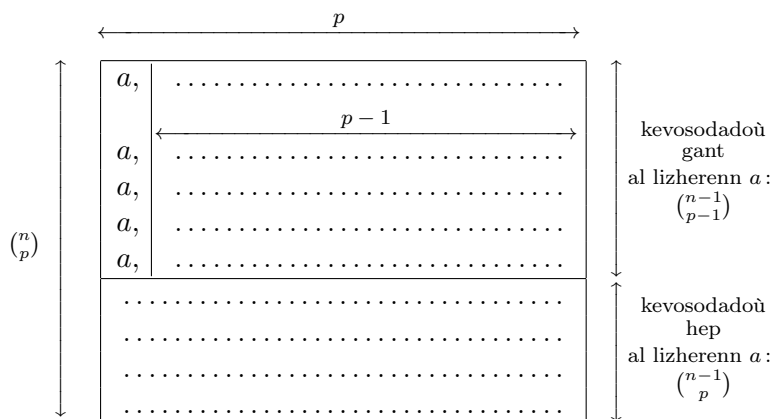
**EVEZHIADENN** — Evit jediñ an niveroù  $\binom{n}{p}$  e vez aesoc'h alies ober gant ar rezh :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}^{p \text{ period}}}{\underbrace{p(p-1) \cdots 1}_{p \text{ period}}} .$$

Da skouer :  $\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ . Goude ez eeunaer kent jediñ ar rannad.

**2. Dre zarren**

Desellomp hollad an  $\binom{n}{p}$  kevosodad hep arread ennañ  $p$  elfenn dibabet adouez  $n$ , ha stalomp ar c'hevosodadoù-se en ur rezi. Da gentañ e skrivomp ar c'hevosodadoù enno al lizherenn  $a$  ha war-lerc'h ar re hep al lizherenn  $a$ .



Daou zoare zo da zewerzhañ niver ar c'hevosodadoù enno al lizherenn  $a$  :

• **Kentañ doare**

Niver ar c'hevosodadoù enno al lizherenn  $a$  zo par da niver reveziadennoù al lizherenn  $a$  er rezi, pa na c'hell bezañ nemet ul lizherenn  $a$  d'ar muiañ e pep kevosodad. Hogen reveziadennoù an holl lizheroù er rezi zo par,

dre berzh ar c'hemparzh e-keñver pep hini eus an  $n$  lizherenn. O vezañ ma'z eus er rezi  $\binom{n}{p}$  kevosodad bep a  $p$  lizherenn, eleze un hollad a  $p\binom{n}{p}$  lizherenn, pep hini eus an  $n$  lizherenn a revez :

$$\frac{p\binom{n}{p}}{n} \text{ gwech.}$$

• **Eil doare**

Desellomp ar  $\binom{n-1}{p-1}$  kevosodad  $p-1$  lizherenn a c'haller amparañ diwarbouez an  $n-1$  lizherenn estreget  $a$ . Ouzh pep hini eus ar c'hevosodadoù-se e c'haller kevrediñ un hag un hepken eus ar c'hevosodadoù  $p$  lizherenn adouez an  $n$ ,  $a$  en o zouez. A-geveskemm, ouzh pep kevosodad ennañ  $a$  e c'haller kevrediñ un hag un hepken eus ar  $\binom{n-1}{p-1}$  kevosodad. A se ez eo par niver ar c'hevosodadoù enno  $a$  da :

$$\binom{n-1}{p-1}.$$

Dre geñveriañ an daou eriñvadur e tisoc'her gant an daveadur darrenmañ :

$$\frac{p}{n}\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}.$$

Eleze :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

hag

$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-1}{p-1}\binom{n-2}{p-2}$$

.....

$$\binom{2}{n-p+2} = \frac{n-p+2}{2}\binom{1}{n-p+1}.$$

Dre liesaat e teu :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+2)}{p(p-1)\dots 2}\binom{1}{n-p+1}.$$

Hogen  $\binom{1}{n-p+1}$  zo par da  $n-p+1$ : niver an doareoù da zibab un ergorenn a-douez  $n-p+1$ . Da heul:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots 2} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

### 1.2.2.3 Perzhioù an $\binom{n}{p}$ -où

$\forall n \in \mathbb{N}$  hag  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq n$  ez eus:

- **Perzh 1**

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{hag} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}.$$

- **Perzh 2**

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}.$$

Bewech ma tibaber  $p$  elfenn a-douez  $n$  e tibaber ivez dilezel  $n-p$ .

- **Perzh 3** — Mard eo  $1 \leq p \leq n-1$  ez eo:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}.$$

Sklaer eo ez eo par niver an isteskadoù  $p$  elfenn eus  $E$  da sammad ar re a zo enno an elfenn  $h$  mui ar re all hep an elfenn  $h$ . Hogen un isteskad zo ennañ  $p$  elfenn gant  $h$  bewech ma tibaber  $p-1$  elfenn a-douez an  $n-1$  estreget  $h$  hag un isteskad zo ennañ  $p$  elfenn hep  $h$  bewech ma kemerer  $p$  elfenn a-douez an  $n-1$  estreget  $h$ . A se e tewerzher an isteskadoù  $p$  elfenn — ar  $p$ -parzhioù —:  $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

#### Dedalvezadur an trede perzh — Tric'horn Pascal

Dre zedadvout an daveadurioù  $\binom{n}{0} = 1$ ;  $\binom{n}{1} = n$ ;  $\binom{n}{n} = 1$ ;  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$  e c'haller sevel un daolenn dric'hornek amparet gant rezoù niverennet  $0, 1, 2, \dots, n$  ha gant bannoù niverennet  $0, 1, \dots, p$ , hevelep ma ve  $\binom{n}{p}$  en direnn rez  $n$  ha bann  $p$ . Hervez ar goulun amañ dindan e c'haller jediñ  $\binom{n+1}{p+1}$  diwar sammad ar gwerzhadoù  $\binom{n}{p+1}$  ha

$\binom{n}{p}$  ar rez a-us. Gallout a reer enta o jediñ a nes da nes diwar ar rezoù kentañ. Kentañ ha diwezhañ gwezhiader ur rez bennak zo par da 1. Nep gwezhiader all zo sammad ar gwezhiader a-us dezhañ hag an hini en direnn a-gleiz da hemañ.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$				
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$\vdots$	.....							
$\dots$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\dots$	$\binom{n}{n}$
$\dots$	$\binom{n+1}{0}$	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	$\dots$	$\binom{n+1}{p}$	$\binom{n+1}{p+1}$	$\dots$	$\binom{n+1}{n}$

### 1.2.3 REOLLUN BINOM NEWTON

#### 1.2.3.1 Reollun ar binom

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p \cdot b^{n-p} .$$

#### 1.2.3.2 Dienadur

Lies doare zo da zienaat reollun ar binom. Amañ dindan e vo diskouezet daou anezho.

##### • Poellata dre zarren

Daou lankad zo :

1. Gwiriomp ez eo gwir evit  $n = 1$ . Bez' ez eus :  $(a + b)^1 = a + b$ . Dre ar reollun e teu :  $(a + b)^1 = \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} a^p \cdot b^{1-p} = \binom{1}{0} a^0 \cdot b^1 + \binom{1}{1} a^1 \cdot b^0 = b + a = a + b$ .

Gwir eo ar perzh evit  $n = 1$ .

2. Darbennomp ez eo gwir ar perzh evit  $n \in \mathbb{N}^*$  ha dienaomp ez eo gwir c'hoazh evit  $n + 1$ :

Bez' ez eus :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b) = (a + b)^n \cdot a + (a + b)^n \cdot b \quad (1.3)$$

Dre zarbennad darren e ouzomp :  $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ . Dre erlec'hiañ ar riñvenn-se ouzh  $(a + b)^n$  en daveadur (1.3) e teu :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= [\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0] a + [\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0] b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (a + b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{n} a^n b^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (a + b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] a^1 b^n + [\binom{n}{1} + \binom{n}{2}] a^2 b^{n-1} + \dots \\ &\quad + [(\binom{n}{n-1}) + \binom{n}{n}] a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0. \end{aligned}$$

Hogen :

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \quad \text{hag} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$

hag :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1} \quad ; \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n}.$$

Da heul :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n+1}{n} a^n b^1 + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \end{aligned}$$



$$\iff (a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}. \quad \text{Quod erat demonstrandum.}$$

Ar perzh o vezañ gwir evit ar renk  $n = 1$  e c'haller dezren dre zarren ez eo gwir evit nep renk  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ar gwezhiaderioù  $\binom{n}{p}$  a vez graet anezho *gwezhiaderioù binomel* ivez ha merzhout a c'haller ez eo par ar gwezhiaderioù kemparzhek, da skouer:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}, \dots, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

### • Gwezhiaderioù multinomel, hollekadur

$(a + b + \dots + s)^m$  zo ur riñvenn bolinomel a zerez  $m$  e-keñver teskad an  $n$  argemmenn  $a, b, \dots, s$ . A se ez eo he dispakadur sammad bommoù e rezh :

$$K(\alpha, \beta, \dots, \sigma) a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma,$$

gant

$$\alpha + \beta + \dots + \sigma = m; \quad \alpha, \beta, \dots, \sigma \geq 0,$$

$K(\alpha, \beta, \dots, \sigma)$  o vezañ un arstalenn e-keñver  $a, b, \dots, s$ , hogen ur gevreizhenn da  $\alpha, \beta, \dots, \sigma$ .

Skrivañ a c'haller :

$$(a + b + \dots + s)^m = \underbrace{(a + b + \dots + s) \dots (a + b + \dots + s)}_{\text{Liesâd } m \text{ periad par}}.$$

E dispakadur al liesâd-se ez eus un termen en  $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$ , mar kemerer an termen  $a$  e-barzh  $\alpha$  eus an  $m$  periad, an termen  $b$  e  $\beta$  eus an  $m$  periad, ..., an termen  $s$  e  $\sigma$  eus an  $m$  periad. An arstalenn  $K$  zo par da niver an doareoù da gaout un termen e  $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$ . Graet e vez *gwezhiader multinomel* anezhi.

Niverennomp ar periadoù eus 1 da  $m$  :

$$(a + b + \dots + s)^m = \underbrace{(a + b + \dots + s)}_{\text{periad 1}} \underbrace{(a + b + \dots + s)}_{\text{periad 2}} \dots \underbrace{(a + b + \dots + s)}_{\text{periad } m}.$$

Skrivomp  $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$  er rezh :

$$\underbrace{(a, a, \dots, a)}_{\alpha \text{ gwech}} \underbrace{(b, b, \dots, b)}_{\beta \text{ gwech}} \dots \underbrace{(s, s, \dots, s)}_{\sigma \text{ gwech}}.$$

Ent hollek ez eus kement a zoareoù da gaout un termen en  $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$  ha ma'z eus a gevamsavadurioù gant arreadoù eus an  $m$  arouezenn :

$$(a, a, a, \dots, a, b, b, \dots, b, \dots, s, s, \dots, s),$$

eleze, gant ar c'hendivizad  $0! = 1$ :

$$K(\alpha, \beta, \dots, \sigma) = \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \sigma!}.$$

E gwir, nep kevamsavadur gant arreadoù a ziskouez splann ar periadoù ma'z eo engwerç'het an  $\alpha$  lizherenn  $a$ , ar  $\beta$  lizherenn  $b$ , . . . , ar  $\sigma$  lizherenn  $s$ . Ouzhpenn se, nep doare da gaout un termen en  $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$  a glot ouzh ur c'hevamsavadur gant arreadoù.

A se:

$$(a + b + \dots + s)^m = \sum_{\alpha + \beta + \dots + \sigma = m} \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \sigma!} a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma.$$

A-wechoù e rezhienner :

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \sigma!} = \binom{m}{\alpha, \beta, \dots, \sigma}.$$

Da skouer, evit  $n = 2$  e tisoc'her gant reollun ar binom :

$$(a + b)^m = \sum_{\alpha=0}^m \frac{m!}{\alpha! (m-\alpha)!} a^\alpha b^{m-\alpha}.$$

### 1.2.3.3 Dedalvezadur reollun ar binom

• **Kemeromp  $a = x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ha  $b = 1$ , a se e teu :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (x + 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot x^p$$

$$\text{rak } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N} \quad p \leq n, \text{ ez eus } b^{n-p} = 1^{n-p} = 1.$$

neuze :

$$\begin{aligned} (x + 1)^n &= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots \\ &+ \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots \\ &+ nx^{n-1} + x^n. \end{aligned}$$

- **Ent dibarek, mard eo  $x = 1$ :**

e teu

$$\begin{aligned}(1 + 1)^n &= \binom{n}{0}1^0 + \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

Neuze :

$$\boxed{2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}.$$

A du 'rall e terc'henn  $\binom{n}{p}$  evit  $p \leq n$  niver an isteskadoù enno  $p$  elfenn a-douez an  $n$  elfenn eus un teskad. A se ez eo  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$  hollad an teskadoù enno  $0, 1, 2, \dots, n$  elfenn tennet eus un teskad  $E_n$  ennañ  $n$  elfenn, eleze hollad an isteskadoù bezus eus  $E_n$ .

Hogen  $\mathfrak{P}(E_n)$  zo teskad parzhioù  $E_n$  ha skrivañ a c'haller :

$$\boxed{\text{Card}(\mathfrak{P}E_n) = 2^{\text{Card}(E_n)}}.$$

- **Degouezh dibarek all**

Kemeromp  $x = -1$ . Neuze e teu:

$$(1 - 1)^n = \binom{n}{0}(-1)^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n = 0.$$

Neuze :

$$\boxed{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0}.$$

**EVEZHIADENN** — Pouezus eo notañ — o vezañ ma'z eo talvoudek ar reollun evit  $\forall a \in \mathbb{R}$  ha  $\forall b \in \mathbb{R}$  — e c'hell  $b$  bezañ leiel. Dav diwall avat ez eo muiel  $a^p$  evit  $p$  hebar ha leiel evit  $p$  ampar.

- **Arunderioù dibarek**

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2. \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Tric'horn Pascal a dalvez da jediñ ar gwezhiaderioù  $\binom{n}{p}$ .

• **Evezhiadenn a-zivout dewerzhadur  $\binom{n}{p}$  pa vez bras  $n$**

E degouezhioù zo ez eo dic'hallus jediñ  $n!$ . Bez' ez eus un arnesâd eus  $n!$ , anvet reollun Stirling, a gevaraez savelañ ur werzhad arnesadek eus  $n!$ :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Neuze:

$$\ln(n!) \simeq \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n.$$

### 1.2.4 KEVOSODADOÛ GANT ARREADOÛ

Bez et un teskad  $n$  elfenn digemmadus:

$$(a, b, \dots, s).$$

Graet e vez *kevosodad gant arreadoù* ennañ  $p$  elfenn dibabet a-douez  $n$  eus ur staladur anurzhiet, gant arreadoù mar bez, amparet gant  $p$  elfenn dibabet a-douez an  $n$  elfenn: en un kevosodad gant arreadoù ez eus  $p$  elfenn en holl, reoù zo anezho o revout lies gwech (betek  $p$  gwech).

E se, evit evit  $n = 3$  ha  $p = 2$ , ez eus 6 kevosodad gant arreadoù:

$$(a, a), (b, b), (c, c) \\ (a, b), (a, c), (b, c).$$

Anat eo e c'hell  $p$  bezañ brasoc'h eget  $n$ , tra ma'z eo par  $p$  da  $n$ , d'ar muiañ, e degouezh ar c'hevosodadoù hep arread.

Pep kevosodad hep arread zo e-touez ar c'hevosodadoù gant arreadoù. Sklaer eo ez eus muioc'h a gevosodadoù gant arreadoù eget a gevosodadoù hep arread:

$$K_n^p > C_n^p,$$

nemet evit  $p = 1$ :

$$K_n^1 = C_n^1 = n.$$

### 1.2.4.1 Dienadur war-eeun

Desellomp un teskad  $n$  log *digemmadus* dispartiet gant  $n - 1$  speurenn etreat ha  $p$  boull *andigemmadus*. Eriñvomp an doareoù da renkañ ar boulloù-se el logoù, pep hini eus an  $n$  log o tegemerout diouzh an dro un niver diforzh a vouldoù :  $0, 1, \dots, p$ , hervez al lun amañ dindan.

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
0 0 0	0	0 0		0

Deverkomp da bep log ul lizherenn :  $a$  evit an hini gentañ,  $b$  evit an eil, ... ,  $s$  evit an hini diwezhañ. Desellomp ur c'hevobodad gant arreadoù ennañ  $p$  lizherenn dibabet a-douez  $(a, b, \dots, s)$ , da skouer ( $n = 5$ ,  $p = 7$ ) :

$$(a, a, a, b, c, c, e),$$

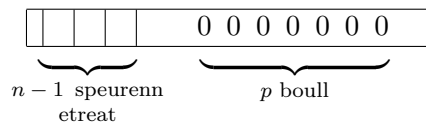
ha kendivizomp ez arouez ar staladur :

- 3 boull zo el log kentañ;
- 1 voull zo en eil log;
- 2 voull zo en trede log;
- n'eus hini ebet er pevare log;
- 1 voull zo er pempet log :

Kement a zoareoù zo da renkañ ar boulloù el logoù (boulloù andigemmadus, logoù digemmadus) ha ma'z eus a gevodadoù gant arreadoù, enno  $p$  arouezenn dibabet a-douez  $n$  :  $K_n^p$ .

Dewerzhomp an niver-se war-eeun :

Dilec'hiomp da c'horthoz an  $n - 1$  speurenn etreat ha dastumomp int dirak ar boulloù :



Dre gevamsaviñ an  $n - 1$  speurenn hag ar  $p$  boull e c'haller genel ur wech hag ur wech hepken pep hini eus ar  $K_n^p$  staladur gallus.

Alese :

$$K_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!}.$$

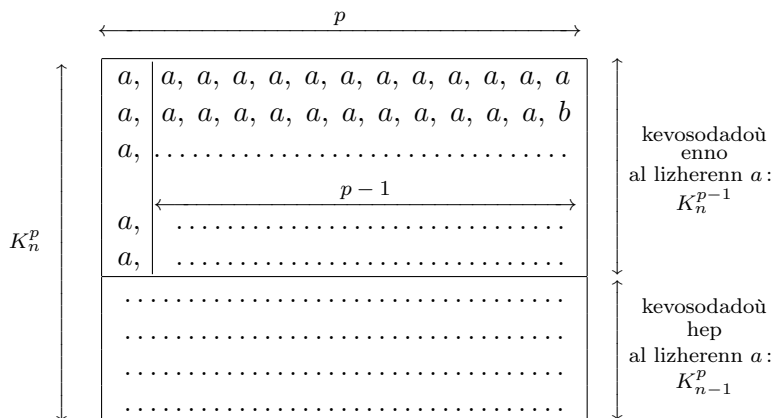
Eleze :

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

### 1.2.4.2 Dienadur dre zarren

Desellomp teskad ar  $K_n^p$  kevosodad  $p$  elfenn dibabet a-douez  $n$  gant arreadoù, ha renkomp int en ur rezi. Kentañ penn skrivomp ar c'hevosodadoù enno al lizherenn  $a$  ha war-lerc'h ar re hepti.

Dewerzhomp div wech niver reveziadennoù al lizherenn  $a$  er rezi.



- **Kentañ doare**

Er rezi ez eus en holl  $pK_n^p$  lizherenn. O vezañ ma'z eo arreet pep lizherenn an un niver a wechoù – en arbenn eus ar c'hemparzh e-keñver an  $n$  lizherenn — e revez al lizherenn  $a$  :

$$\frac{p}{n} K_n^p \text{ gwech.}$$

- **Eil doare**

Pep kevosodad gant arreadoù ennañ al lizherenn  $a$  a c'hell bezañ kevredet ouzh ur c'hevosodad gant arreadur  $p-1$  lizherenn dibabet a-douez  $n$ . Da neuze ez eus  $K_n^{p-1}$  kevosodad enno al lizherenn  $a$ .

Niver reveziadennoù al lizherenn  $a$  zo par neuze da :  $K_n^{p-1} +$  niver reveziadennoù al lizherenn  $a$  en isrezi  $p - 1$  bann ha  $K_n^{p-1}$  rez.

En isrezi-se, ennañ  $(p - 1)K_n^{p-1}$  lizherenn, e revez pep lizherenn an un niver  $a$  wechoù. Neuze e revez  $a$  en isrezi :

$$\frac{p-1}{n} K_n^{p-1} \text{ gwech.}$$

Alese en holl, niver reveziadennoù  $a$  er rezi a-bezh :

$$K_n^{p-1} + \frac{p-1}{n} K_n^{p-1} = \frac{n+p-1}{n} K_n^{p-1}.$$

Dre geñveriañ an daou eriñvadur-se e tisoc'her gant an daveadur darren :

$$\frac{p}{n} K_n^p = \frac{n+p-1}{n} K_n^{p-1},$$

eleze :

$$K_n^p = \frac{n+p-1}{p} K_n^{p-1},$$

hag :

$$\begin{aligned} K_n^{p-1} &= \frac{n+p-2}{p-1} K_n^{p-2} \\ &\dots\dots\dots \\ K_n^2 &= \frac{n+1}{2} K_n^1. \end{aligned}$$

Dre liesaat e teu :

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)}{p(p-1)\cdots 2} K_n^1.$$

Hogen  $K_n^1 = 1$  : niver an doareoù da zibab un elfenn a-douez  $n$ . Da heul :

$$\begin{aligned} K_n^p &= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n)}{p(p-1)\cdots 1} K_n^1 = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}, \\ K_n^p &= \binom{n+p-1}{p}. \end{aligned}$$

Menegomp an daveadur darren :  $K_n^p = K_{n-1}^p + K_{n-1}^{p-1}$ .

### 1.2.5 LODENNADUR HOLLEKAET

Mar lodenner  $n$  ergorenn *digemmadus* dasparzhet e  $m$  rumm (par pe anpar) e  $p$  kombod *digemmadus*, hollad an doareoù da lodennañ zo :

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^p (n.j)!},$$

$n.j$  o vezañ niver an ergorenoù lodennet er c'hombod  $j$ . E-touez an holl zoareoù da lodennañ an  $n$  ergorenn-se, ar re a glot ouzh an daolenn amañ dindan :

Rummoù \ Kombodoù	$n^{\circ}1$	...	$n^{\circ}j$	...	$n^{\circ}p$	Hollad
$n^{\circ}1$						
...						
$n^{\circ}i$			$n_{ij}$			$n_{i.}$
...						
$n^{\circ}m$						
Hollad			$n.j$			$n$

a eriñver dre :

$$\frac{\prod_{i=1}^m (n_{i.})!}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^p (n_{ij}!)}$$

#### SKOUER

Pet doare zo da lodennañ ur splotad 52 kartenn etre pevar c'hoarier, hevelep ma ve dasparzhet teir fikezenn d'ar c'hoarierion  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ha peder fikezenn d'ar c'hoarier  $D$ ?

Ar blegenn-se a glot gant an daolenn-mañ :



C'hoarierion Livioù	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	Hollad
Pikez	3	3	3	4	13
Livioù all	10	10	10	9	39
Hollad	13	13	13	13	52

Alese niver an doareoù da zaspazhañ ar c'hartoù etre pevar c'hoarier o klotañ gant an daolenn-se :

$$\frac{13!}{3!3!3!4!} \cdot \frac{39!}{10!10!10!9!}$$

war un hollad a :  $\frac{52!}{[13!]^4}$ .

## POELLADENNOÙ

- 1.01** Pet doare zo da renkañ pemp ergorenn digemmadus e-barzh teir boest (en ur voest e c'haller lakaat 0, 1, 2, 3, 4, 5 ergorenn).
- 1.02** Bezet an teskad pemp sifrenn  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- Pet niver peder sifrenn anpar a c'haller sevel diwar  $E$ ?
  - Pet niver pemp sifrenn anpar a c'haller sevel diwar  $E$ ?
  - Pet niver pemp sifrenn anpar pe get a c'haller sevel diwar  $E$ ?
  - Pet niver c'hwech sifrenn a c'haller sevel gant ar sifrennoù: 1, 1, 2, 2, 2, 3?
- 1.03** Pet doare zo da dregejañ lizherennoù ar ger KALANNA?
- 1.04** Pet ger 1, 2, 3, 4 pe 5 lizherenn a c'haller sevel diwar lizherennoù ar ger BUHEZ (hep pe gant ster)?
- 1.05** Pevar faotr ha teir flac'h a fell dezho azezañ war ur skaoñ. Savelañ pet doare zo d'o stalañ war ar skaoñ en degouezhioù-mañ:
- Emañ an tri faotr kichen ha kichen, hag ar plac'hed ivez.
  - N'eus paotr ebet e-kichen ur paotr, na plac'h ebet e-kichen ur plac'h.
- 1.06** Bezet al lizherennoù A, B, U, V, Y.
- Pet ger 5 lizherenn unreveziat a c'haller sevel diwar ar 5 lizherenn-se?
  - Pet ger 5 lizherenn unreveziat a c'haller sevel, hevelep ma ne ve ket A ha Y kichen ha kichen?
- 1.07** Bezet ur spletad 52 kartenn.
- Pet doare zo da lodennañ ar c'hartoù etre pevar c'hoarier A, B, C ha D?
  - Pet doare zo da lodennañ ar c'hartoù hervez ar blegenn-mañ:
    - A a zegemer 5 treflezenn, 2 bikezenn, 4 c'heurenn ha 2 garavenn,
    - B a zegemer 4 zreflezenn, 0 pikezenn, 7 keurenn ha 2 garavenn,
    - C a zegemer 3 zreflezenn, 10 pikezenn, 0 keurenn ha 0 karavenn,
    - D a zegemer 1 dreflezenn, 1 bikezenn, 2 geurenn ha 9 c'haravenn.
- 1.08** War un doug-mantilli ez eus pemp krog. Pet doare zo da ispilhañ, hep lakaat div vantell an eil war eben:
- Teir mantell?
  - Pemp mantell?
- 1.09** O loc'hañ diwar ur gêr A e tremen un treug dre ar c'hêrioù B, C, D, E ha F.
- Eriñvañ an treugoù bezus.
  - Pet anezho zo, hevelep ma ve D an trede kêr en treug?
  - Pet treug zo, hevelep ma ve gweladennet ar gêr C a-raok ar gêr D?

- 1.10** Pet doare zo da renkañ 5 levr war 3 astell?
- 1.11** Ur c'hlasad 35 skoliad a zle dibab daou zerc'houezour. Dasparzhet eo ar skolidi e tri rumm : 7 diabarzhad, 18 diavaeziad ha 10 hanterdinellad. Pet doare zo da zibab an daou zerc'houezour, hevelep ma vefent e daou rumm disparti?
- 1.12** Daouzek levr zo da renkañ war seizh astell.
- Eriñvañ ar renkadurioù bezus.
  - Eriñvañ ar renkadurioù, hevelep ma ve ul levr da nebeutañ war bep astell.
- 1.13** Eus ur spletaad 32 kartenn e tenner lerc'h ouzh lerc'h ur gartenn gentañ, un eil, ha goude un trede, hep o lakaat en-dro er spletaad.
- Eriñvañ an tennadurioù bezus.
  - Eriñvañ an tennadurioù bezus en degouezhioù-mañ :
    - Tennet ez eus bet teir fikezenn.
    - An eil kartenn zo ur bikezenn.
    - An eil kartenn zo ur bikezenn hag an trede ur born.
- 1.14** Tennañ a reer 5 kartenn war un dro eus ur spletaad 32 kartenn ; e se e tenner un dornad pemp kartenn.
- Eriñvañ an tennadurioù bezus.
  - Kavout en o zouez niver an dornadoù enno :
    - Ur born da nebeutañ;
    - Teir zreflezenn ha div bikezenn;
    - Nemet keur pe garo;
    - Ur born hepken;
    - Keur hepken pe garo hepken.
- 1.15** 1. Dispakañ ar riñvenn  $(1 + x)^n$ .
- Dre zodiñ  $x = 2$ , dezren ar sammad :  $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$ .
  - a) Diskouez ez eus evit an holl naturelion  $n$  ha  $p$ , hevelep ma ve  $1 \leq p \leq n$ :

$$p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}.$$

- Dezren alese un dewerzhad eus ar sammad :  $S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$  e rezh  $a \times 2^b$ , ma'z eo  $a$  ha  $b$  kevanion naturel da savelañ.

- 1.16** Dezren ez eus evit nep kevan  $n$  ha nep kevan  $p$ , hevelep ma'z eo  $1 \leq p \leq n$ :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

**1.17** Bezet  $E$  teskad ar c'hevanion naturel peder sifrenn amparet gant ar sifrennoù 1, 2, 3, 4, 5 ha 6 (pep hini anezho a c'hell revout betek peder gwech).

- Dewerzhañ  $\text{Card}(E)$ .
- Pet elfenn zo en  $E$  dezho sifrennoù unreveziat?
- Pet elfenn zo en  $E$  dezho div 1 ha div sifrenn all anpar?
- Pet elfenn zo en  $E$  o kregiñ gant ur sifrenn ampar, an kez sifrenn oc'h ezvezañ goude?

**1.18** 1. a) Savelañ gwezhiader an termen en  $a^3b^2$  e dispakadur  $(2a + 3b)^5$ .

b) Dezren alese gwezhiader  $a^3b^2c^2$  e dispakadur  $(2a + 3b + c)^7$ .

2. a) Dedalvout reollun ar binom da  $(1 + i)^7$  hep amsaviñ ar gwezhiaderioù binomel gant o gwerzhadoù niverel.

b) Dre zedallvout  $[(1 + i)^2]^3(1 + i)$ , dewerzhañ ur rezhenn all eus  $(1 + i)^7$ .

c) Dezren eus a) ha b) ar sammadoù :

$$S_1 = \binom{7}{0} - \binom{7}{2} + \binom{7}{4} - \binom{7}{6} \text{ ha } S_2 = \binom{7}{1} - \binom{7}{3} + \binom{7}{5} - \binom{7}{7}.$$

**1.19** Teurel a reer tri diñs war un dro, unan glas, unan gwer hag unan ruz, an talioù anezho o vezañ niverennet 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ar sifrenn war dal uhelañ pep diñs a noter. Un dennadenn zo un heuliad teir sifrenn notet diouzh an urzh : diñs glas, diñs gwer, diñs ruz.

- Pet tennadenn vezus zo?
- Pet tennadenn zo, hevelep ma ve unreveziat an teir sifrenn?
- Pet tennadenn zo, hevelep ma ve sammad an teir sifrenn par da 15?

**1.20** Un emstrivad en deus da respont en un arnodenn da zek goulenn dezho lies dibab ; evit pep goulenn ez eus pevar respont bezus.

1. Pet kloued respontoù a c'haller kaout ?

2. a) Pet kloued zo enno eizh respont mat rik?

b) Pet zo enno nav respont mat rik?

3. a) Bezet  $0 \leq k \leq 10$ . Dezren ez eo niver ar c'hlouedoù enno  $k$  respont mat rik :  $n_k = \binom{10}{k} 3^{10-k}$ .

b) Dezren alese gwerzhad :  $\sum_{k=0}^{k=10} \binom{10}{k} 3^{10-k}$ .